$\mathbb{R}^n$中的子空间.（行空间，列空间，更进一步理解行秩=列秩）

A $m\times n$ $x\in\mathbb{R}^n$.

$Ax=0$ 解集满足
① 加法封闭 closed under addition.
② 数乘封闭 closed under scalar multiplication.

定义：将满足①,②的$\mathbb{R}^n$中的子集称为$\mathbb{R}^n$的子空间
非空 W.

例子：0子空间. $\{0\}$ 只包含0向量.

性质：任一$\mathbb{R}^n$的子空间W均包含0向量.

证明：$0\in\mathbb{R}$, $0\cdot v=0$ ← 0向量.
实数 W中的向量

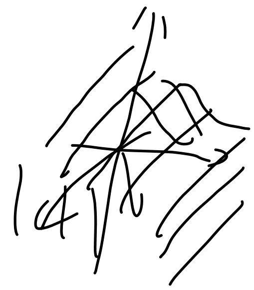
0子空间是最小的子空间.
包含关系下

一. kernel (零空间) 定义: A $m \times n$.

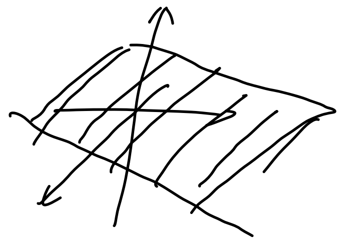
$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$$

例子. A 3×3

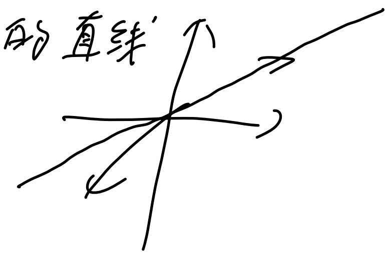
$rk(A) = 0$, $\ker A = \mathbb{R}^3$



$rk(A) = 1$, $\ker A =$ 通过原点的平面.



$rk(A) = 2$, $\ker A =$ 通过原点的直线



$rk(A) = 3$ $\ker A = \{0\}$

二、Span（张成，线性生成）

定义：$v_1, \cdots v_s \in \mathbb{R}^n$.（$v_1 \cdots v_s$ 可重复）

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_s) = \{\text{linear combinations of } v_1 \cdots v_s\}$$
$$= \{x_1 v_1 + \cdots + x_s v_s \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

验证：$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_s)$ 满足子空间的①②，

是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间。

Span 与 linear system $Ax = b$.

A $m \times n$.　$A = [v_1 \cdots v_n]$　$v_i \in \mathbb{R}^m$，$b \in \mathbb{R}^m$

$Ax = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_n)$

也称 $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_n)$ 是 A 的列空间（column space）

（有时记作 $C(A)$）　$C(A) \subset \mathbb{R}^m$.

同样可定义 A 的行空间（row space）$\subset \mathbb{R}^n$.

也可以定无穷多个向量的 span．$\{v_i\}_{i \in I}$．I 指标集
$v_i \in \mathbb{R}^n$．　下标集

$$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{v_i\}_{i \in I} = \{\underbrace{x_{i_1} v_{i_1} + \cdots + x_{i_k} v_{i_k}}_{\text{所有有限和.}} \mid x_{i_1} \cdots x_{i_k} \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}_{>0},\ i_1, \cdots, i_k \in I\}.$$

(无穷和不包含在内. 为什么? 没定义.

通过"+", "·" ⟹ 有限个的线性组合)

两种产生子空间的方式. kernel, span.

联系:

ker $\underline{Ax=0}$ 解的结构 $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ 自由元

$x_{j_a}\cdots$ 主元.

x_{j_a} = "linear combination" of $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$

解: $x = x_{i_1}\overset{v_1}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}} + x_{i_2}\overset{v_2}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}} + \cdots + x_{i_k}\overset{v_k}{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}$

第i_1个位置是1.

$i_2,\cdots i_k$ 是0.

$\boxed{A \quad m\times n}$

$\ker A = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1\cdots v_k) \quad k = n - rk(A)$

反之, 是否 $\operatorname{Span}_{\mathbb{R}}(\underline{v_1\cdots v_k}) = \ker A$ for some A?

任取 $\underline{v_1\cdots v_k \in \mathbb{R}^m}$

例子: $\mathbb{R}^3$. $\quad \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}}_{v_2}\right)$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right) \iff$$

$$\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$ 对 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 有解.

$$\iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix} = \mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\2 & 5 & x_2\\3 & 6 & x_3\end{pmatrix}$$

row reduction $\begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\2 & 5 & x_2\\3 & 6 & x_3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\0 & -3 & x_2-2x_1\\0 & -6 & x_3-3x_1\end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 4 & x_1\\0 & -3 & x_2-2x_1\\ \hline 0 & 0 & x_3-2x_2+x_1\end{pmatrix}$$

$$\iff x_3 - 2x_2 + x_1 = 0$$

$A = [1, -2, 1]$. $\quad \ker A = \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

性质：行变换不改变 A 的行空间.

证明：$A=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$. A 作行变换 $\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_m \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\tilde{v}_1, \cdots \tilde{v}_m$ 都是 $v_1 \cdots v_m$ 的 linear combination.

$\Rightarrow$ $\tilde{v}_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_m)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\tilde{v}_1, \cdots \tilde{v}_m) \subset \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(v_1 \cdots v_m)$

反之，由行变换可逆，$\Rightarrow$ $\supset$.

例子：$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}\right) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left(\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}}\right)$

因为 $v_3 = 2v_2 - v_1$,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3(2v_2 - v_1)$$
$$= (a_1 - a_3) v_1 + (a_2 + 2a_3) v_2$$

v_3 是多余的 (redundant)

寻找"最经济"极小的生成元组以及 Span 中 linear combination 的系数唯一性（线性表出的唯一性）